Проект

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 года по математике

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2012 года по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2012 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2012 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2012 года.

Правильное решение каждого из заданий B1–B14 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий C1 и C2 оценивается 2 баллами, C3 и C4 – 3 баллами, C5 и C6 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32.

Верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, даётся одно-два возможных решения. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов 2012 года

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин.). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценке работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

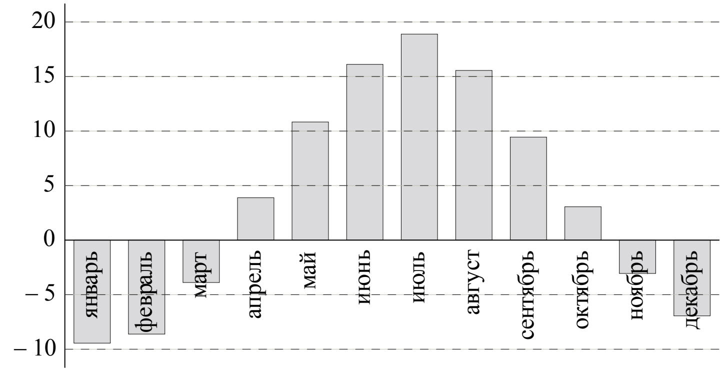
Желаем успеха!

Часть 1

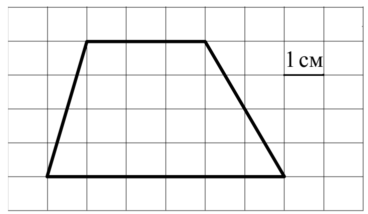
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Ярославле по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда средняя температура в Ярославле была отрицательной.



B3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B4 Строительная фирма планирует купить 70 м^3 пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

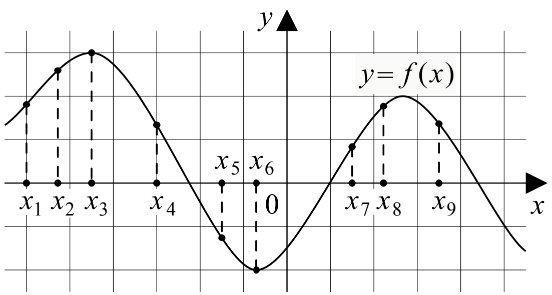
Поставщик	**Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м^3)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия доставки**
А	2 600	10 000	
Б	2 800	8 000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 рублей доставка бесплатная
В	2 700	8 000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 рублей доставка бесплатная

B5 Найдите корень уравнения $\log_3(x-3)=2$.

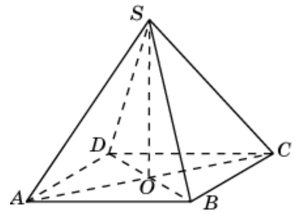
B6 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите угол BOC, если угол BAC равен 32°.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

B8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



B9 Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB.



B10 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

B11 Объём первого цилиндра равен 12 м³. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра (в м³).

B12 Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

B13 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

B14 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

© 2012 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите уравнение $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$.

С2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

С4 На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

С6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Система оценивания демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задание	Ответ
B1	5
B2	5
B3	18
B4	192 000
B5	12
B6	64
B7	–0,8
B8	3
B9	5
B10	0,92
B11	9
B12	2,4
B13	5
B14	1

Ответы к заданиям части 2

Задание	Ответ
C1	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; корни, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$: $\frac{7\pi}{3}$, $3\pi-\arccos\frac{1}{3}$
C2	30°
C3	$(2;\ \log_2 11]$
C4	1 или 7
C5	$\left(\frac{1}{2};\ 4+\sqrt{6}\right)$
C6	а) 44; б) отрицательных; в) 17

Решения и критерии оценивания заданий части 2

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий части 2 зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

C1 Решите уравнение $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

Решение.

1. Уравнение $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ приводится к виду $6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{3}$.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{1}{3}$ имеет корни $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Исходное уравнение имеет корни:

$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. В серии $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, найдём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$: $2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 3\pi$, $\frac{5}{6} \le n \le \frac{4}{3}$, так как n – целое, то $n = 1$: $x = \frac{7\pi}{3}$.

В серии $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, нет корней, принадлежащих отрезку $[2\pi; 3\pi]$, так как $2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 3\pi$, $1\frac{1}{6} \le n \le 1\frac{2}{3}$.

В серии $x = \pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$: $2\pi \le \pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k \le 3\pi$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3} \le n \le 1 + \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}$, так как k – целое, то $k = 1$: $3\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

В серии $x = -\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, нет корней, принадлежащих отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

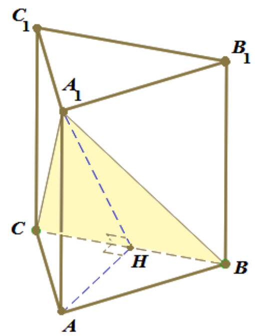
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$: $\frac{7\pi}{3}$, $3\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно решено уравнение и произведён отбор корней	2
Верно решено уравнение, но не произведён отбор корней, или верно найдены только корни из заданного отрезка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение.

Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC – равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC. Следовательно, $\angle A_1HA$ – линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1.



Из треугольника A_1AB найдём: $AA_1 = 1$.

Из треугольника AHB найдём: $AH = \sqrt{3}$.

Из треугольника HAA_1 найдём:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен $30°$.

Ответ: $30°$.

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) $\frac{\pi}{6}$;

Б) $\frac{\pi}{6}$ рад.

В) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и т.п.

Возможны другие решения. Например, с использованием векторов или метода координат.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x \le 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

Решение.

1. Неравенство $4^x \le 9\cdot 2^x + 22$ запишем в виде $\left(2^x\right)^2 - 9\cdot 2^x - 22 \le 0$. Относительно $t = 2^x$ неравенство имеет вид: $t^2 - 9t - 22 \le 0$, откуда получаем: $(t+2)(t-11) \le 0$, $-2 \le t \le 11$.

Значит, $-2 \le 2^x \le 11$, $x \le \log_2 11$.

2. Второе неравенство системы определено при $\begin{cases} (x+1)(x-2) > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0, \end{cases}$ то есть при $x < -1$ и $x > 2$.

При допустимых значениях переменной получаем:

$\log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}$, $\log_3\left((x+1)(x-2)\right) - \log_3 \dfrac{x+1}{x-2} \le 1$,

$\log_3(x-2)^2 \le 1$, $(x-2)^2 \le 3$, $2 - \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{3}$.

С учётом области допустимых значений переменной получаем решение второго неравенства системы: $2 < x \le 2 + \sqrt{3}$.

3. Сравним $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2,25} = 1,5$, то

$2 + \sqrt{3} > 3,5 = \log_2\left(8\cdot\sqrt{2}\right) > \log_2(8\cdot 1,4) = \log_2(11,2) > \log_2 11$,

следовательно, $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$.

Решение системы неравенств: $\left(2; \log_2 11\right]$.

Ответ: $\left(2; \log_2 11\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Комментарий. Если обоснованно получены оба ответа: $x \le \log_2 11$ и $2 < x \le 2 + \sqrt{3}$, после чего лишь **сказано**, но никак не обосновано, что $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$, то такое решение оценивается в 2 балла.

C4 На стороне *BA* угла ABC, равного 30°, взята такая точка *D*, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки *A*, *D* и касающейся прямой *BC*.

Решение.

Центр *O* искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку *AD*. Обозначим *P* середину отрезка *AD*, *Q* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую *BC*, *E* – точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой *BC* (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой *BC* следует, что отрезки *OA*, *OD* и *OQ* равны радиусу *R* окружности.

Заметим, что точка *O* не может лежать по ту же сторону от прямой *AB*, что и точка *E*, так как в этом случае расстояние от точки *O* до прямой *BC* меньше, чем расстояние от неё до точки *A*.

Из прямоугольного треугольника *BPE* с катетом *BP* = 2 и $\angle B = 30^\circ$ находим, что $PE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Так как *OA* = *R* и $AP = 1$, получаем: $OP = \sqrt{R^2 - 1}$, следовательно, $OE = \sqrt{R^2 - 1} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

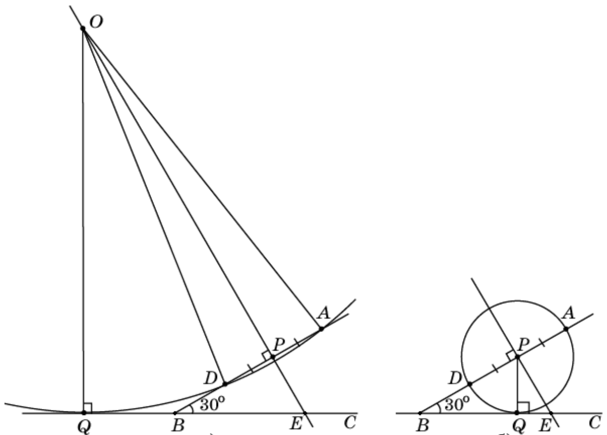
Из прямоугольного треугольника *OQE*, в котором $\angle E = 60^\circ$, находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}OE = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-1}=R-1.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения и приведём подобные члены. Получим уравнение $R^2-8R+7=0$, решая которое находим два корня: $R_1=1$, $R_2=7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рисунок б).



а) б)

Ответ: 1 или 7.

Другое решение.

Пусть точка Q касания окружности с прямой BC лежит на луче BC (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2=BA\cdot BD=\left(BD+DA\right)\cdot BD=\left(1+2\right)\cdot 1=3,$$

откуда $BQ=\sqrt{3}$.

Пусть O – точка пересечения луча BA и перпендикуляра к BC, проведённого через точку Q. Из прямоугольного треугольника BQO находим:

$$BO=\frac{BQ}{\cos 30^\circ}=2\text{, тогда } AO=OD=1 \text{ и } OQ=\frac{1}{2}BO=1.$$

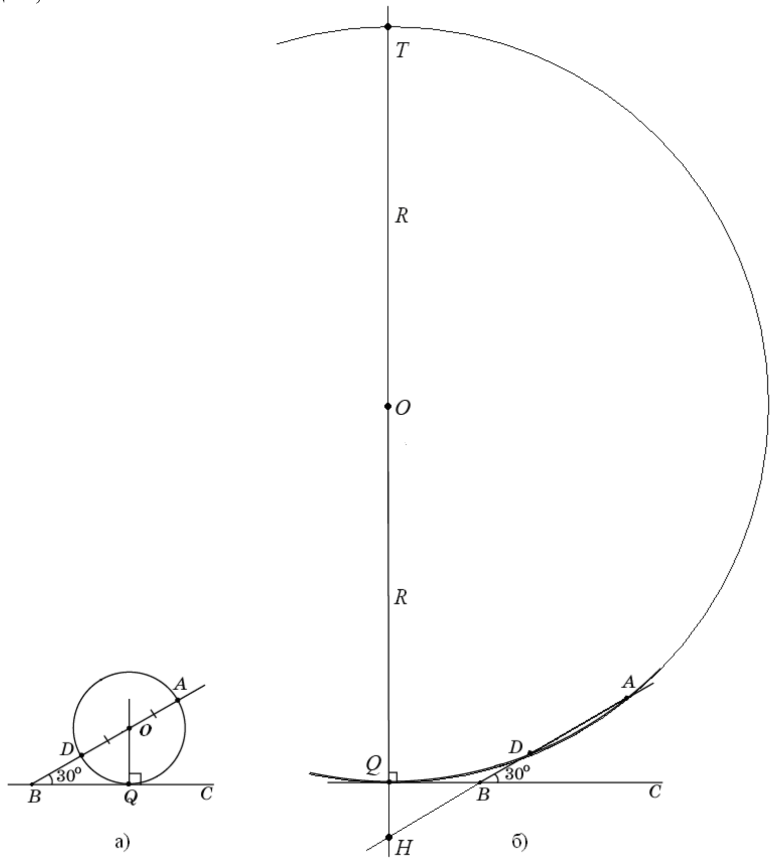
Таким образом, точка O удалена от точек A, D и Q на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно, O – центр искомой окружности, а её радиус равен 1.

Пусть теперь точка Q касания окружности с прямой BC лежит на продолжении BC за точку B (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку Q перпендикулярно BC, пересекает прямую AB в точке H, а окружность вторично – в точке T. Тогда

$$BQ=\sqrt{BA\cdot BD}=\sqrt{3},\quad \angle HBQ=\angle ABC=30^\circ,$$

$$BH=\frac{BQ_1}{\cos 30^\circ}=2,\ HQ=\frac{1}{2}BH=1.$$

Если R – радиус окружности, то $QT=2R$. По теореме о двух секущих $HQ\cdot HT=HA\cdot HD$, то есть $1\cdot\left(1+2R\right)=\left(2+3\right)\cdot 3$, откуда находим, что $R=7$.



а) б)

Ответ: 1 или 7.

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) 1, 7;
Б) радиус окружности равен 7 или 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ больше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+7\geq 0$: $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а её график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$;

б) при $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+(2a+8)x-7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

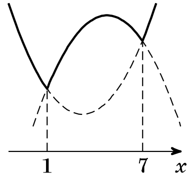


Рис. 1

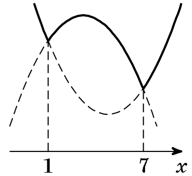


Рис. 2

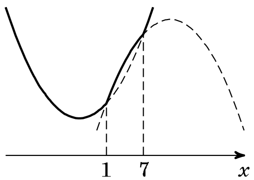


Рис. 3

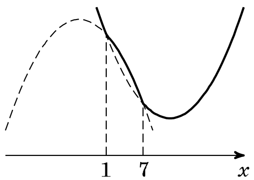


Рис. 4

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-a\notin[1;\ 7]$ – то в точке $x=4-a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{14}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 3, \\ a^2-8a+10<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<3, \\ 3a^2-8a-8<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 3, \\ 4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<3, \\ \dfrac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\dfrac{4+\sqrt{40}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\leq a<4+\sqrt{6} \\ \dfrac{1}{2}<a<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ 4+\sqrt{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

$в_{оценка}$) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$, $3l\leq 77$, $l\leq 25$, $k=2l-33\leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

$в_{пример}$) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0. Тогда $\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=\frac{68-200}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), $в_{пример}$), $в_{оценка}$)	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), $в_{пример}$), $в_{оценка}$)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), $в_{пример}$), $в_{оценка}$)	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), $в_{пример}$), $в_{оценка}$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4